數學傳播 50卷1期, pp. 139-144

由畢氏定理的一種證明發現的結論*

甘志國

摘要: 文章由畢氏定理的一種證明, 發現了一個新結論, 再給出了其平面幾何證法, 最後還給出了該結論的推廣。

關鍵字: 畢氏定理、證明、發現、結論、推廣。

本文由畢氏定理的一種證明, 發現了一個新結論, 再給出了其平面幾何證法, 最後還給出了該結論的推廣。

1. 畢氏定理及其一種證明

畢氏定理, 即“直角三角形兩條直角邊的平方和等於斜邊的平方”, 它是平面幾何中的一顆璀璨明珠。

其證法有很多種, 據說早年有一本書《畢氏定理的證明》, 其中就收錄了畢氏定理的 307 種證法。關於畢氏定理的證明, 流傳較廣的有趙爽 (約 182∽250) 弦圖的證法、美國第 20 任總統茄菲爾德 (James Abram Garfield, 1831∽1881) 的證法。實際上, 托勒密 (約 90∽168) 定理“圓內接四邊形的兩條對角線之積等於兩組對邊之積的和”的一個特例 (當圓內接四邊形是矩形時) 就是畢氏定理, 因而由托勒密定理的證明也可給出畢氏定理的證明。

[美] 卡爾·B. 博耶 (Carl B. Boyer) 著的名著《數學史 (修訂版)》[1] 第 124-125 頁用下面的方法 (該著作寫道“有人猜想, 這個證明是歐幾里得的原創”) 給出了畢氏定理的以下證法:

如圖 1 所示, 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=\mathrm{Rt}\angle$。在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 外作三個正方形 $ABED, ACGF, BCHI$, 連結 AI, BF, CD, CF, 作 $CK\perp DE$ 於 K, 設兩條線段 CK, AB 交於點 J。

可得 $S_{\text{正方形}ACGF}=AF^2$, $2S_{\triangle ABF}=AF\cdot AC=AF^2$ (因爲 $\triangle ABF$ 的邊 AF 上的高即兩條平行線 BG, AF 之間的距離), 所以 $S_{\text{正方形}ACGF}=2S_{\triangle ABF}$。

還可證得 $\triangle ABF\cong\triangle ADC$ (邊角邊), 所以 $S_{\triangle ABF}=S_{\triangle ADC}$。

還可得 $2S_{\triangle ADC}=AD\cdot DK=S_{\text{矩形}ADKJ}$, 所以 $S_{\text{正方形}ACGF}=S_{\text{矩形}ADKJ}$。

*基金專案: 本文係北京市教育學會“十三五”教育科研滾動立項課題“數學文化與高考研究”(課題編號 FT2017GD003, 課題負責人: 甘志國) 階段性研究成果之一。

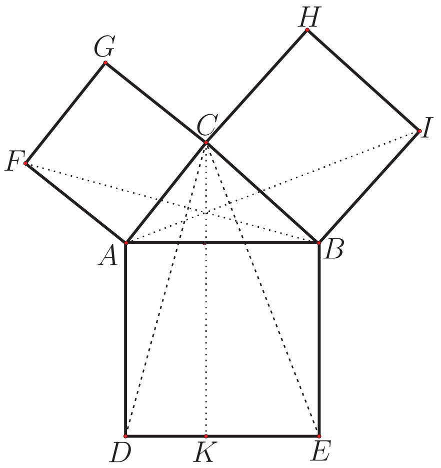

圖1

同理, 可得 $S_{\text{正方形}BCHI} = BI^2$, $2S_{\triangle ABI} = BI \cdot IH = BI^2$, 所以 $S_{\text{正方形}BCHI} = 2S_{\triangle ABI} = 2S_{\triangle EBC} = S_{\text{矩形}BEKJ}$。

因而, $S_{\text{正方形}ACGF} = BI^2 + S_{\text{正方形}BCHI} = S_{\text{矩形}ADKJ} + S_{\text{矩形}BEKJ} = S_{\text{正方形}ABED}$, 得 $AC^2 + BC^2 = AB^2$, 即欲證結論成立。

2. 由畢氏定理的一種證明發現的結論

細心的讀者, 可以發現並猜測出下面的結論: 在圖 1 中, 三條直線 AI, BF, CJ 共點。

可以用建立平面直角坐標系的方法證明該結論成立:

證明: 如圖 2 所示, 分別以射線 CA, CB 的方向爲 x 軸、y 軸的正方向建立平面直角坐標系 xOy, 並設 $CB = a$, $CA = b$ $(a > 0, b > 0)$, 可得五點 $A(b,0), B(0,a), C(0,0), F(b,-b)$, $I(-a,a)$。由畢氏定理知, 可設 $AB = c = \sqrt{a^2 + b^2}$。

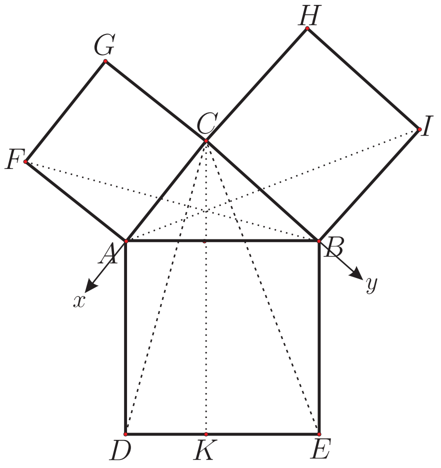

圖2

進而可求得直線 BF 的方程是 $y=-\dfrac{a+b}{b}x+a$, 直線 AI 的方程是 $y=-\dfrac{a}{a+b}(x-b)$。

在 Rt$\triangle AJC$ 中 ($\angle AJC=$ Rt$\angle$), 由射影定理, 可求得 $AJ=\dfrac{b^2}{c}$, $BJ=\dfrac{a^2}{c}$, 還可求得 $CJ=\dfrac{ab}{c}$。

在 Rt$\triangle AJC$ 中, 可求得邊 AC 上的高 $\dfrac{AJ\cdot CJ}{AC}=\dfrac{\frac{b^2}{c}\cdot\frac{ab}{c}}{b}=\dfrac{ab^2}{c^2}$; 在 Rt$\triangle AJB$ 中, 可求得邊 BC 上的高 $\dfrac{BJ\cdot CJ}{BC}=\dfrac{\frac{a^2}{c}\cdot\frac{ab}{c}}{a}=\dfrac{a^2b}{c^2}$。所以, 點 J 的座標是 $\left(\dfrac{a^2b}{c^2},\dfrac{ab^2}{c^2}\right)$。進而可求得直線 CJ 的方程是 $y=\dfrac{b}{a}x$。

再求得兩條直線 $BF:y=-\dfrac{a+b}{b}x+a$ 與直線 $CJ:y=\dfrac{b}{a}x$ 的交點座標是 $\left(\dfrac{a^2b}{a^2+ab+b^2},\dfrac{ab^2}{a^2+ab+b^2}\right)$。還可驗證該點在直線 AI 上, 所以三條直線 AI,BF,CJ 共點。

還可把證得的結論敘述得更簡單些, 就是下面的結論 1。

結論 1: 如圖 3 所示, 在 Rt$\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=$ Rt$\angle$。在 Rt$\triangle ABC$ 外作兩個直角 $\angle CAF,\angle IBC$ 且 $AC=AF$, $BC=BI$。設兩條線段 AI,BF 交於點 L, 則 $CL\perp AB$。

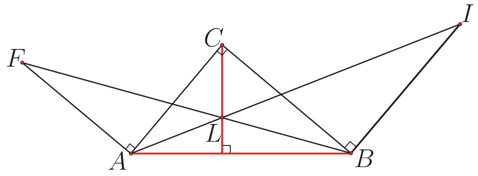

圖 3

證明: 如圖 4 所示, 作正方形 $BCHI$, 再過點 I 作 $IP\perp AB$ 交射線 AH 於 P (易知 A,C,H 三點共線)。設兩條線段 AC,BF 交於點 M, 兩條線段 AI,BC 交於點 N。

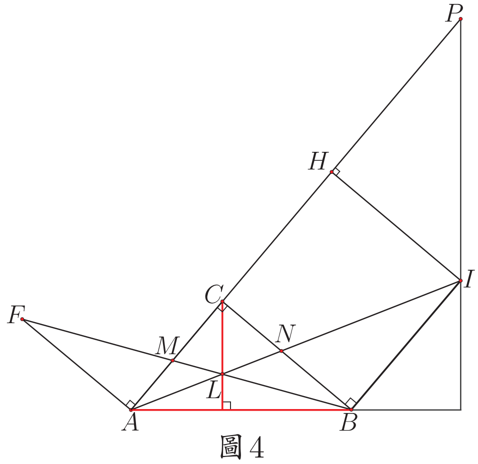

圖 4

設 $CB=a$, $CA=b$ $(a>0,b>0)$。由 $AF//BC$, 可得 $\dfrac{AM}{AF}=\dfrac{CM}{BC}$, 所以

$$\frac{AM}{AF}=\frac{AM+CM}{AF+BC}=\frac{b}{b+a},\quad AM=\frac{b^2}{b+a}。$$

由 $AC//BI$, 可得 $\dfrac{AL}{LI}=\dfrac{AM}{BI}$, 所以 $\dfrac{AL}{LI}=\dfrac{b^2}{a(a+b)}$。

可證得 $\text{Rt}\triangle IPH\backsim\text{Rt}\triangle ABC$, 所以

$$\frac{PH}{BC}=\frac{IH}{AC},\quad PH=\frac{a^2}{b},\quad CP=CH+PH=a+\frac{a^2}{b}=\frac{a(a+b)}{b},\quad \frac{AC}{CP}=\frac{b}{a(a+b)}。$$

因而 $\dfrac{AL}{LI}=\dfrac{AC}{CP}$, 所以 $CL//PL$, $CL\perp AB$。

還可用"平面向量"給出下面的向量證法。

結論 1 的平面向量證法: 如圖 3 所示, 設 $CB=a$, $CA=b$ $(a>0,b>0)$, $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{x}$, $\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{y}$, 可得 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$, $\overrightarrow{BI}=\frac{a}{b}\boldsymbol{x}$, $\overrightarrow{AF}=-\frac{b}{a}\boldsymbol{y}$, 所以

$$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\frac{b}{a}\boldsymbol{x}=\frac{a+b}{b}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$$

$$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}=-\frac{b}{a}\boldsymbol{y}-(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=-\boldsymbol{x}-\frac{a+b}{a}\overrightarrow{y}。$$

設 $\overrightarrow{AL}=\lambda\overrightarrow{LI}$, 可得[2]

$$\overrightarrow{BL}=\frac{1}{\lambda+1}\overrightarrow{BA}+\frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{BI}=-\frac{1}{\lambda+1}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\frac{\lambda}{\lambda+1}\cdot\frac{a}{b}\boldsymbol{x}=\frac{a\lambda-b}{b(\lambda+1)}\boldsymbol{x}-\frac{1}{\lambda+1}\boldsymbol{y}。$$

再由 $BL//BF$, 可得 $-\dfrac{1}{\lambda+1}=\dfrac{a+b}{a}\cdot\dfrac{a\lambda-b}{b(\lambda+1)}$, 解得 $\lambda=\dfrac{b^2}{a^2+ab}$, 所以 $\overrightarrow{AL}=\dfrac{b^2}{a^2+ab}\overrightarrow{LI}$, 進而可得

$$\overrightarrow{AL}=\frac{b^2}{a^2+ab+b^2}\overrightarrow{AI}=\frac{b^2}{a^2+ab+b^2}\Big(\frac{a+b}{b}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\Big)=\frac{ab+b^2}{a^2+ab+b^2}\boldsymbol{x}+\frac{b^2}{a^2+ab+b^2}\boldsymbol{y}$$

$$\overrightarrow{CL}=\overrightarrow{AL}-\overrightarrow{AC}=\frac{-a^2}{a^2+ab+b^2}\boldsymbol{x}+\frac{b^2}{a^2+ab+b^2}\boldsymbol{y}。$$

又由 $|\boldsymbol{x}|=b$, $|\boldsymbol{y}|=a$, $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=0$ 可得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CL}\cdot\overrightarrow{AB}&=\Big(\frac{-a^2}{a^2+ab+b^2}\boldsymbol{x}+\frac{b^2}{a^2+ab+b^2}\boldsymbol{y}\Big)\cdot(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\\&=\frac{-a^2}{a^2+ab+b^2}\boldsymbol{x}^2+\frac{b^2}{a^2+ab+b^2}\boldsymbol{y}^2=\frac{-a^2b^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^2a^2}{a^2+ab+b^2}=0\end{aligned}$$

所以 $CL\perp AB$。

實際上, 還可把結論 1 推廣爲下面的結論 2。

結論2: 如圖 5 所示, 在 $\triangle ABC$ 外作 $\triangle ABE, \triangle ACD$, 使得 $\angle ABE = \angle ACD = \mathrm{Rt}\angle$, $\angle BAE = \angle CAD$。設兩條線段 BD, CE 交於點 P, 則 $AP\perp BC$。

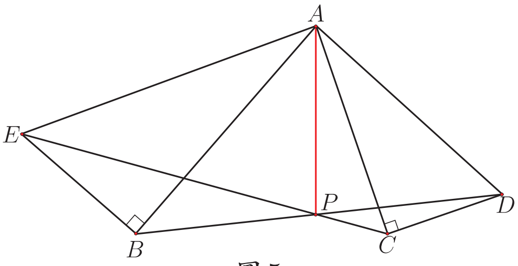

圖 5

證明: 如圖 6 所示, 過點 A 作 $AX\perp CE$ 於 X 且交 BD 於 U, 再作 $AY\perp BD$ 於 Y 且交 CE 於 V, 因而點 P 是 $\triangle AUV$ 的垂心, 得 $AP\perp UV$。連接 BX, CY, XY, UV。

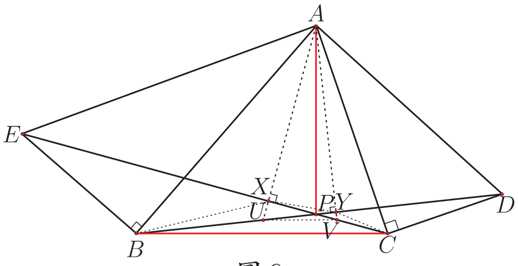

圖 6

由 $\angle AXE = \angle ABE = \mathrm{Rt}\angle$, 可得 A, E, B, X 四點共圓, 所以 $\angle ABX = \angle AEC$; 由 $\angle AYD = \angle ACD = \mathrm{Rt}\angle$, 可得 A, Y, C, D 四點共圓, 所以 $\angle ADY = \angle ACY$。

$$\text{可得 } \angle ABD + \angle ADY = 180^\circ - \angle BAD = 180^\circ - (\angle EAD - \angle BAE),$$
$$\angle AEC + \angle ACX = 180^\circ - \angle CAE = 180^\circ - (\angle EAD - \angle CAD).$$

再由 $\angle BAE = \angle CAD$, 可得 $\angle ABD + \angle ADY = \angle AEC + \angle ACX$, $\angle ABD - \angle AEC = \angle ACX - \angle ADY$ 所以

$$\angle XBY = \angle ABD - \angle ABX = \angle ABD - \angle AEC = \angle ACX - \angle ADY$$
$$= \angle ACX - \angle ACY = \angle XCY$$

因而, X, B, C, Y 四點共圓, 所以 $\angle PXY = \angle PBC$。

由 $\angle AXV = \angle AYU = \mathrm{Rt}\angle$, 可得 $\triangle AXU \backsim \triangle AYU$, 所以 $\dfrac{AX}{AV} = \dfrac{AY}{AU}$, $AX \cdot AU = AY \cdot AV$。再由割線定理的逆定理。可得 X, U, V, Y 四點共圓。

也可這樣證明 X, U, V, Y 四點共圓: 由 A, E, B, X 四點共圓, 可得 $\angle BXU = \angle AEB$; 由題設可得 $\angle AEB = \angle ADC$; 由 A, Y, C, D 四點共圓, 可得 $\angle ADC = \angle CYV$ 所以 $\angle BXU = \angle CYV$。

再由 X, B, C, Y 四點共圓, 可得 $\angle XBY = \angle XCY$, 所以 $\angle BXU + \angle XBY = \angle CYV + \angle XCY$, 即 $\angle XUY = \angle XVY$, 所以 X, U, V, Y 四點共圓。

因而 $\angle PUV = \angle PXY$, 所以 $\angle PUV = \angle PBC$, $UV//BC$。

再由證得的 $AP \perp UV$, 可得 $AP \perp BC$。

注: 該證明只適合 $\angle BPC$ 爲鈍角的情況, 而且是一部分的情形。在圖 6 中, 當 $\angle BPC$ 逐漸減小時, 交點 U, V 就不在 $\triangle ABC$ 內了; 當 $\angle BPC$ 是直角時, 交點 U, V 就不存在了, 當 U, V 是鋭角時, 又有不同的圖形。但均可證明它們對應的結論均正確。囿於篇幅, 這裡證明過程從略。

3. 小結

(1) 瞭解數學史並深入鑽研數學史中的經典 (比如, 畢氏定理及其證明) 是廣大師生及數學愛好者永恆的話題, 包括尋求解決問題的自然方法, 推廣結論等;

(2) 平面幾何問題往往都有平面解析幾何解法、三角解法 (解三角形)、平面向量解法及平面幾何解法這四種傳統解法 [3], 因而, 讀者還可嘗試用三角解法來求解本題。

參考文獻

1. [美]卡爾·B. 博耶 (Carl B. Boyer) 著, [美] 尤塔·C. 梅茲巴赫 (Uta C. Merzbach) 修訂, 秦傳安譯。數學史(修訂版)(上)[M]。北京: 中央編譯出版社, 2012。
2. 甘志國。介紹關於平面向量的一個結論及其應用[J]。數學教學研究, 2020(3), 50-53。
3. 甘志國。一題三解 彰顯經典[J]。數理化學習 (高中版), 2021(1), 3-6。

—本文作者任教中國北京市豐臺區第二中學—